FUNKCIA, DEFINIČNÝ OBOR, OBOR HODNÔT

Funkcia - priradenie (predpis), ktoré každému prvku z množiny *D* priraďuje práve jeden prvok množiny *H*.

Množina D – definičný obor

Množina H – obor hodnôt

Funkciu môžeme vyjadriť

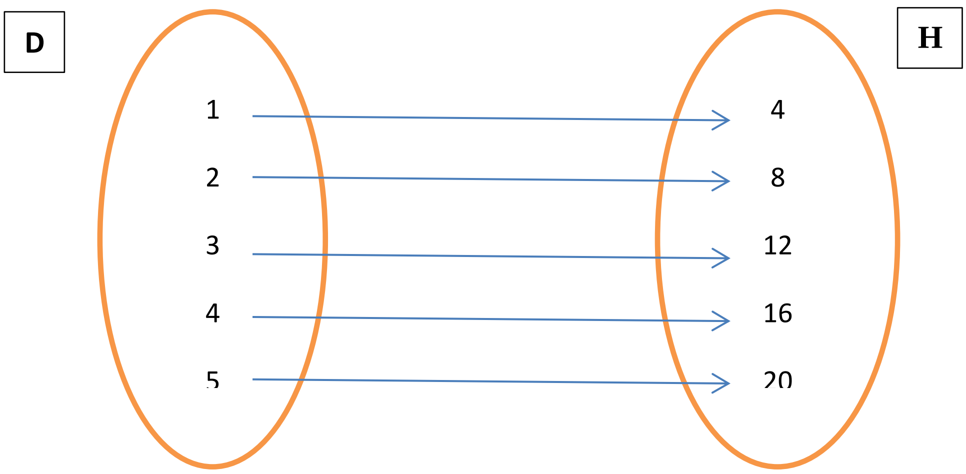
a) tabuľkou,
b) množinami,
c) vypisovaním prvkov.

<u>Príklady funkcií z bežného života:</u>

a) Povrch kocky je funkciou veľkosti jej hrany: $S = 6 . a . a$

a	1	2	3	4	5	6	Definičný obor
S	6	24	54	96	150	216	Obor hodnôt

b) Predpis = priradenie obvod štvorca $o = 4 . a$



Strana štvorca ... *a*

Obvod štvorca ... *o*

c) $D = \{1,2,3,4\}$ funkcia $y = 6.x + 5$

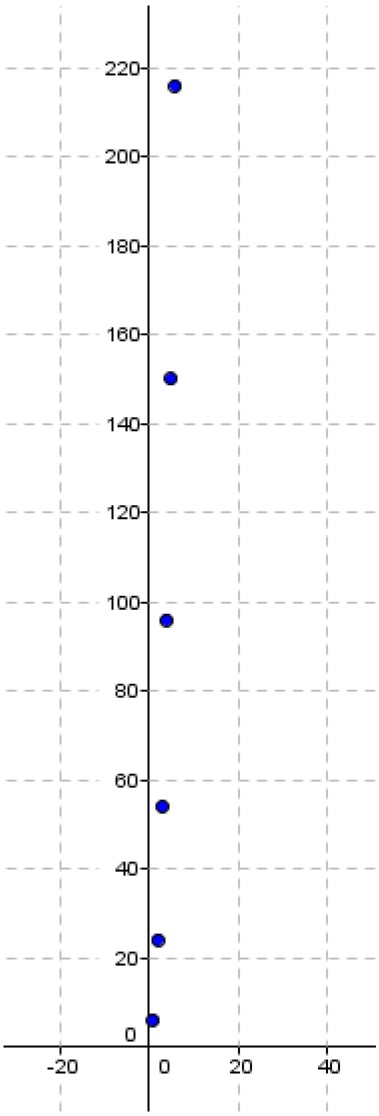
Podľa predpisu vypočítame hodnoty pre hodnoty z definičného oboru:

$x = 1;\quad y = 6.1 + 5 = 11$ $\qquad$ $x = 3;\quad y = 6.3 + 5 = 23$

$x = 2;\quad y = 6.2 + 5 = 17$ $\qquad$ $x = 4;\quad y = 6.4 + 5 = 29$

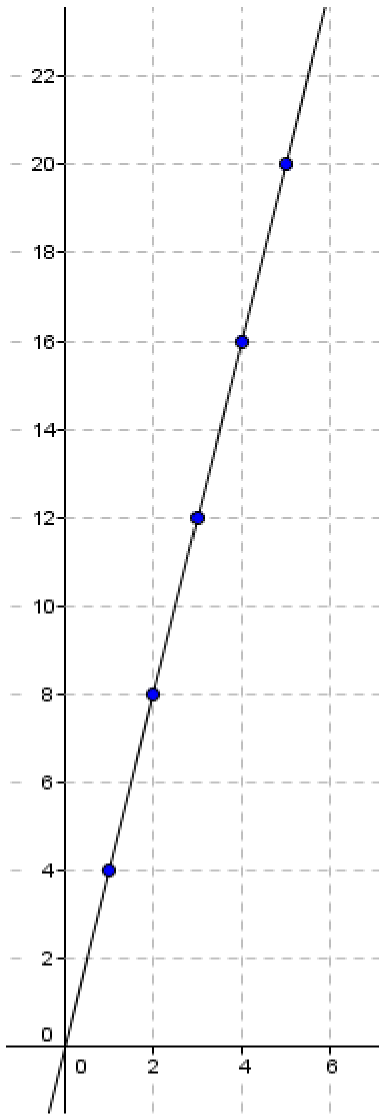
$$H = \{11,17,23,29\}$$

Každé z týchto vyjadrení funkcie vieme zobraziť na grafe v pravouhlom súradnicovom systéme:



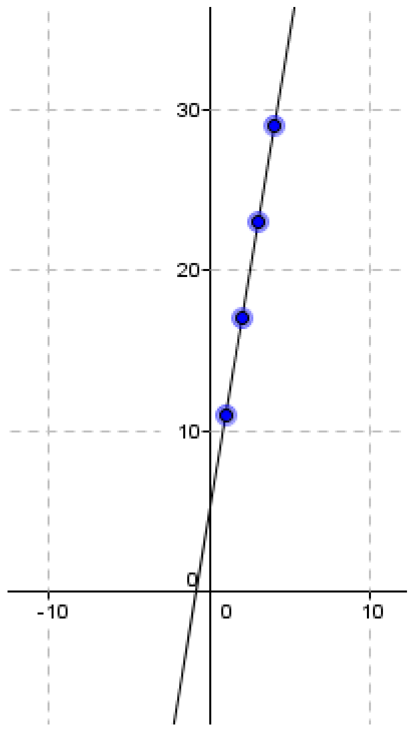
Obr. 1 a)

Povrch kocky v závislosti od dĺžky hrany kocky



Obr. 1 b)

Obvod štvorca v závislosti od dĺžky jeho strany



Obr. 1 c)

funkcia $y = 6.x + 5$ pre hodnoty $D = \{1,2,3,4\}$

LINEÁRNA FUNKCIA (9. ročník)

LINEÁRNA FUNKCIA

Funkcia zapísaná pomocou rovnice $y = k.x + q$, kde $k, q \in R$ a pre jej definičný obor platí $D = R$ nazývame **lineárna funkcia.**

Napr.	Hodnoty koeficientov *k, q*
$y = 3x + 8$	$k = 3; \quad q = 8$
$y = -4x + 0{,}5$	$k = -4; \quad q = 0{,}5$
$y = -2x - 9$	$k = -2; \quad q = -9$
$y = x - \frac{4}{7}$	$k = 1; \quad q = -\frac{4}{7}$
$y = 11 + 2{,}3x$	$k = 2{,}3; \quad q = 11$
$y = -6{,}8 + 0{,}9x$	$k = 0{,}9; \quad q = -6{,}8$

Grafom lineárnej funkcie je **priamka** alebo jej časť (ak je definičný obor obmedzený).

Ako zostrojiť graf lineárnej funkcie?

- Na určenie presnej polohy priamky potrebujeme určiť pozíciu aspoň dvoch bodov.
- Určím si aspoň 2 body z definičného oboru a k nim určím obor hodnôt podľa danej rovnice.
- Hodnoty si zapíšem do tabuľky a body nanesiem do súradnicového systému, zostrojím priamku cez dané body.

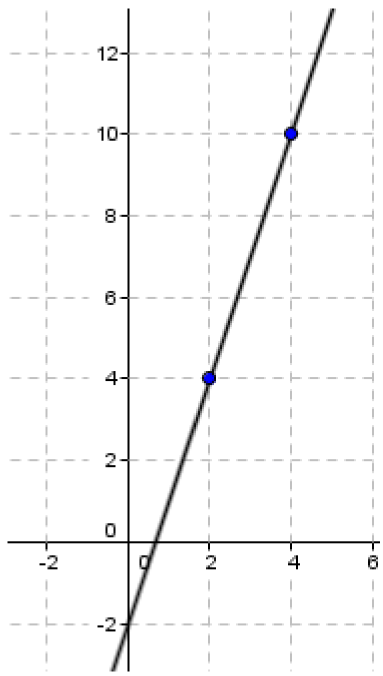
PRÍKLAD 1: Zostrojte graf lineárnej funkcie $y = 3.x - 2$; $D = R$

Zvolím si dva body, napr.

$x = 2; \; y = 3.2 - 2 = 6 - 2 = 4$

$x = 4; \; y = 3.4 - 2 = 12 - 2 = 10$

x	2	4	**D**
y	4	10	**H**



Obr. 2

Grafom funkcie je priamka prechádzajúca bodmi $[2; 4], [4; 10]$

LINEÁRNA FUNKCIA (9. ročník)

PRÍKLAD 2: Zostrojte graf funkcie

a) $y = 2x - 1$

x	0	1
Y	-1	1

b) $y = 3x + 2$

x	0	1
Y	2	5

c) $y = -4x + 2$

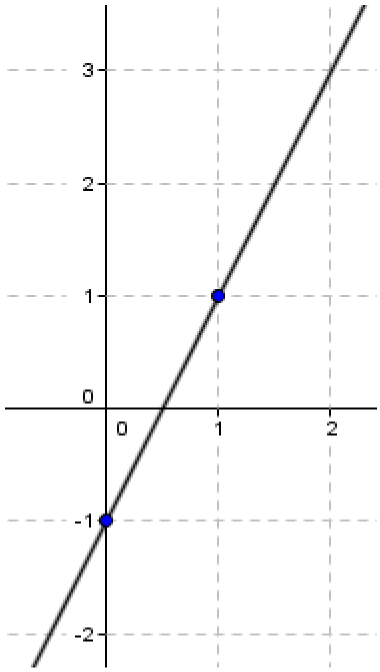
x	0	1
Y	2	-2

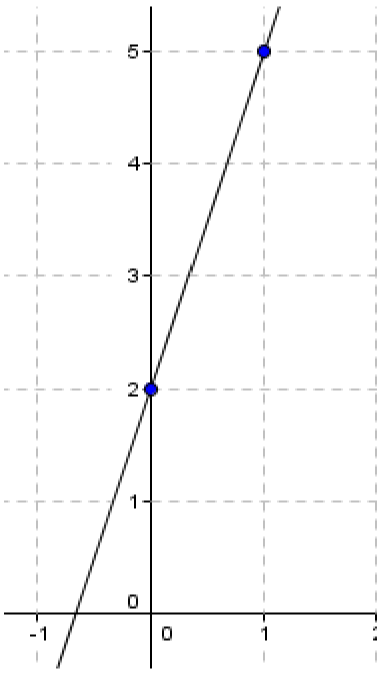
d) $y = -x - 3$

x	0	1
Y	-3	-4

Obr. 3 a)

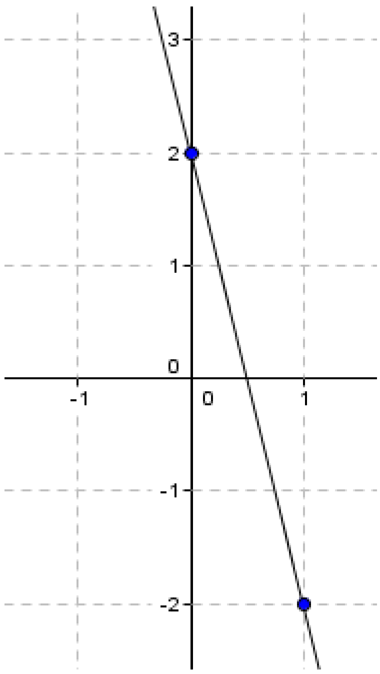
Priesečník s osou y má súradnice $[0;\ -1]$





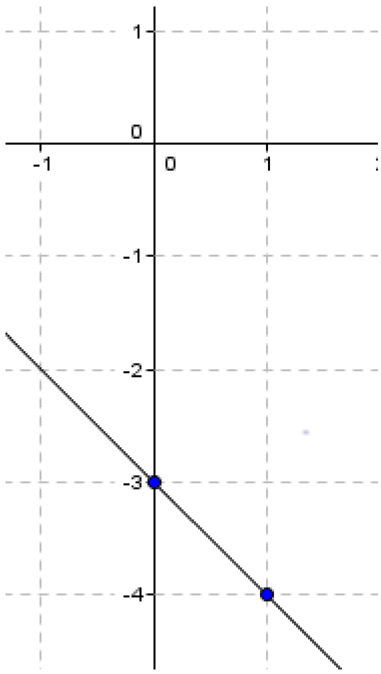
Obr. 3 b)

Priesečník s osou y má súradnice $[0;\ 2]$



Obr. 3 c)

Priesečník s osou y má súradnice $[0;\ 2]$



Obr. 3 d

Priesečník s osou y má súradnice $[0;\ -3]$

Graf lineárnej funkcie $y = k.x + q$ pretína os y vždy v bode so súradnicami $[0; q]$

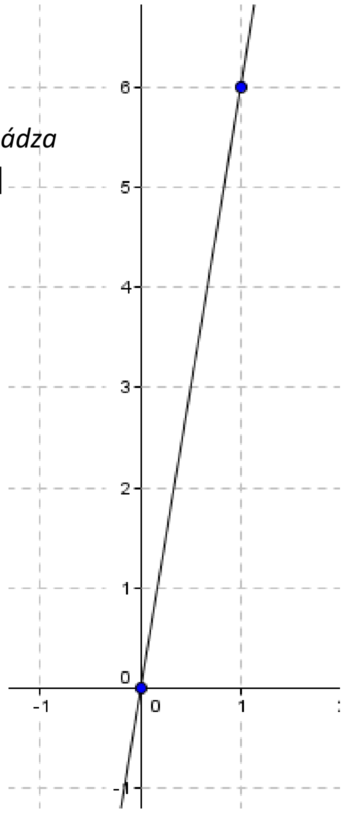
<u>PRÍKLAD 3:</u> Zapíšte lineárnu funkciu, v ktorej $k = 6, q = 0$ a zostrojte graf tejto funkcie.

Rovnica bude $y = 6x + 0$, teda $y = 6x$.

x	0	1
Y	0	6

Obr. 4

Graf funkcie prechádza bodom $[0; 0]$



Graf tejto funkcie prechádza bodom $[0; 0]$.

<u>PRÍKLAD 4:</u> Určte súradnice priesečníka s osou *y*, ak $q = 0$.

Sú to napr. rovnice lineárnej *funkcie*

$y = 3x$ a pre $x = 0$; $y = 3.0 = 0$

$y = -4x$ a pre $x = 0$; $y = -4.0 = 0$

$y = 0{,}2x$ a pre $x = 0$; $y = 0{,}2.0 = 0$

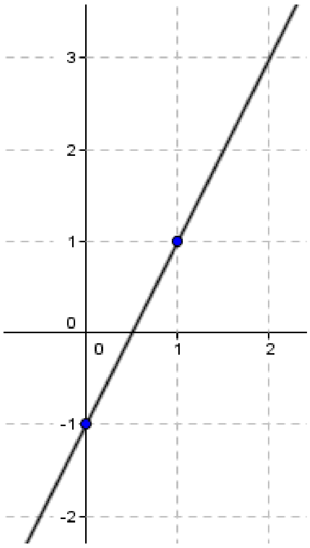
Lineárna funkcia $y = k.x + q$, kde $q = 0$ je **priama úmernosť.** Graf priamej úmernosti prechádza začiatkom súradnicovej sústavy.

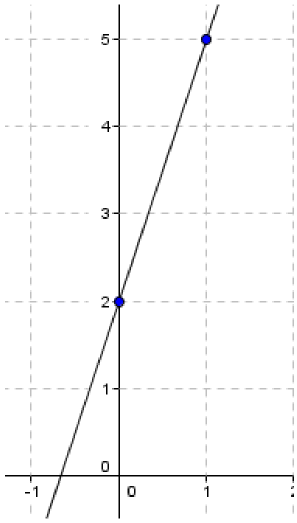
<u>PRÍKLAD 5:</u> Pozorujte a porovnajte grafy funkcií z Príkladu 2.

Pre prvé dve rovnice $y = 2x - 1$ a $y = 3x + 2$ pozorujeme, že v tabuľke hodnoty *x* rastú a hodnoty *y* tiež narastajú.

Obr. 5 a)

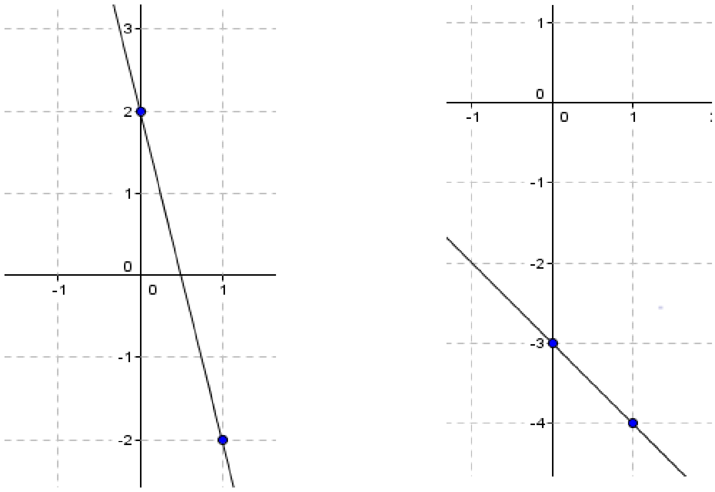
Graf rastúcej funkcie





LINEÁRNA FUNKCIA   (9. ročník)

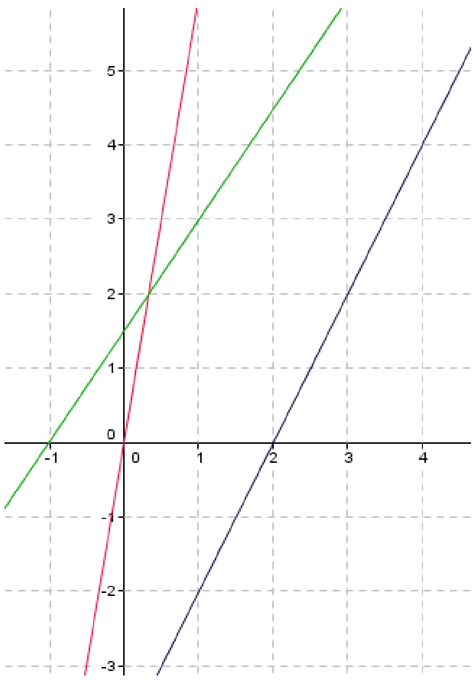
Pre ďalšie dve rovnice $y = -4x + 2$ a $y = -x - 3$ pozorujeme, že v tabuľke hodnoty *x* rastú a hodnoty *y* však klesajú.

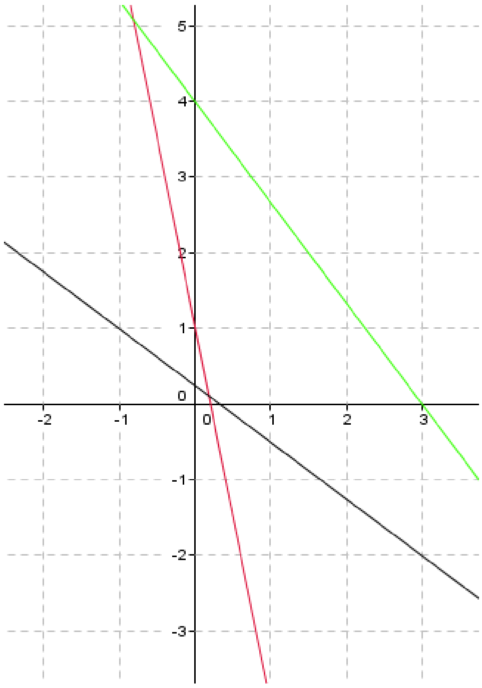


Obr. 5 b)

Graf klesajúcej funkcie

Príklady grafov rastúcich a klesajúcich funkcií:





Obr. 6

Grafy rastúcich a klesajúcich funkcií

Funkcia je rastúca práve vtedy, keď pre každé x_1, x_2 z definičného oboru platí: ak $x_1 < x_2$, tak $y_1 < y_2$ alebo ak $x_1 > x_2$, tak $y_1 > y_2$.

Funkcia je klesajúca práve vtedy, keď pre každé x_1, x_2 z definičného oboru platí: ak $x_1 < x_2$, tak $y_1 > y_2$ alebo ak $x_1 > x_2$, tak $y_1 < y_2$.

Lineárna funkcia $y = k.x + q$ je rastúca, ak $k > 0$.

Lineárna funkcia $y = k.x + q$ je klesajúca, ak $k < 0$.

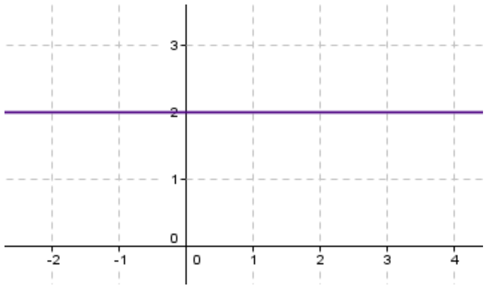
PRÍKLAD 6: Existuje taká funkcia, ktorá nie je ani rastúca ani klesajúca?

Ak v lineárnej funkcii $k > 0$, funkcia je rastúca. Ak v lineárnej funkcii $k < 0$, funkcia je klesajúca. Preto ak $k = 0$, tak platí $y = 0\,.\,x + q$, teda $y = q$.

Skúsme teda zostrojiť grafy napríklad troch funkcií:

a) $y = 0.x + 2$, teda $y = 2$

x	0	1
Y	2	2

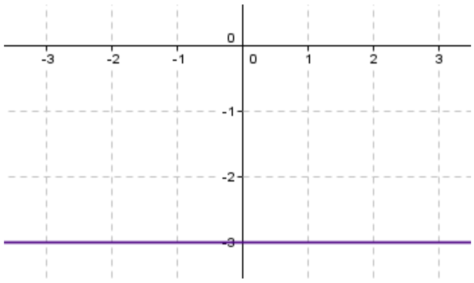


Obr. 7 a)

Priesečník s osou y má súradnice $[0;\ 2]$

b) $y = 0.x - 3$, teda $y = -3$

x	0	1
Y	-3	-3

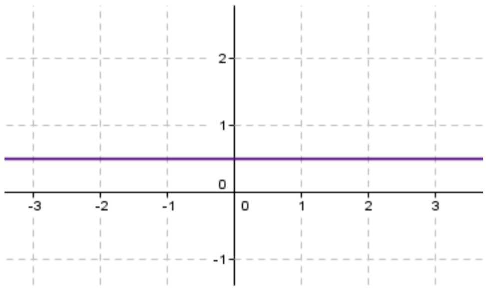


Obr. 7 b)

Priesečník s osou y má súradnice $[0; -3]$

c) $y = 0.x + 0{,}5$, teda $y = 0{,}5$

x	0	1
Y	0,5	0,5



Obr. 7 c)

Priesečník s osou y má súradnice $[0;\ 0{,}5]$

Lineárna funkcia $y = k.x + q$, kde $k = 0$ nazývame **konštantná funkcia.** Jej graf je vždy priamka rovnobežná s osou x , ktorá prechádza bodom $[0; q]$.

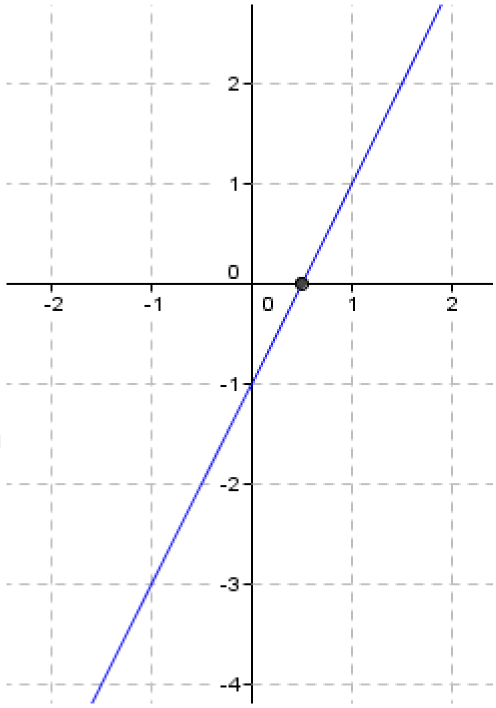
O priesečníku lineárnej funkcie s osou y sme už hovorili, a v akom bode pretína graf funkcie (priamka) os x.

<u>PRÍKLAD 7:</u> Určte priesečník grafu lineárnej funkcie $y = 2x - 1$ s osou *x*

Pre konkrétnu funkciu môžeme riešiť túto úlohu:

- *graficky*

x	0	1
Y	-1	1



Obr. 8

Priesečník s osou x má súradnice

$[0{,}5; 0] = \left[\frac{1}{2}; 0\right]$

Z grafu vidíme, že priesečník s osou *x* má súradnice $\left[\frac{1}{2}; 0\right]$

- *výpočtom*

Vieme, že všetky body, ktoré ležia na osi *x*, majú *y*-ovú súradnicu rovnajúcu sa nule, preto do danej rovnice $y = 2x - 1$ stačí dosadiť za $y = 0$ a *x* vypočítame:

$$0 = 2x - 1$$

$$1 = 2x$$

$$\frac{1}{2} = x$$

Súradnice priesečníka s osou *x* má súradnice $\left[\frac{1}{2}; 0\right]$

<u>PRÍKLAD 8:</u> Určte výpočtom súradnice priesečníkov grafu funkcie $y = -5x - 2$ s osami *x* a *y*

Pre priesečník s *x*-ovou osou platí, že $y = 0$, tak pre rovnicu $y = -5x - 2$ platí

$$0 = -5x - 2$$

$$2 = -5x$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

Súradnice priesečníka s osou *x* má súradnice $\left[-\frac{2}{5}; 0\right]$.

Pre priesečník s *y*-ovou osou platí, že $x = 0$, tak pre rovnicu $y = -5x - 2$ platí

$$y = -5.0 - 2$$

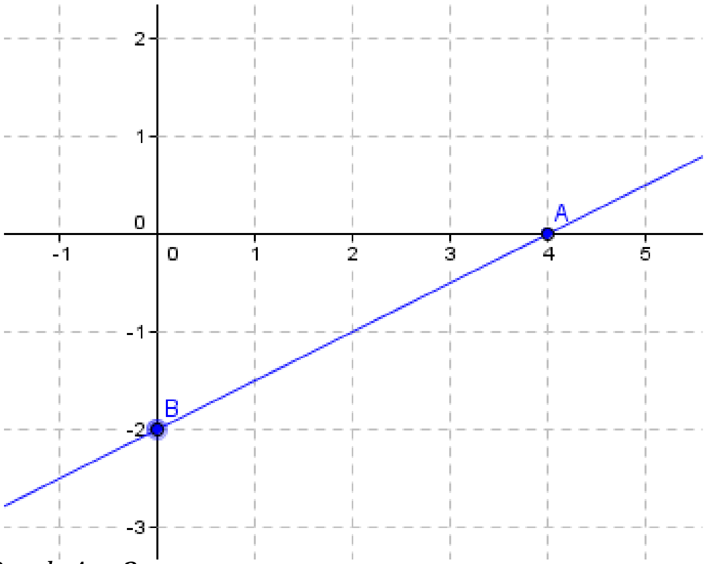
$$y = -2$$

Súradnice priesečníka s osou *y* má súradnice $[0; -2]$.

LINEÁRNA FUNKCIA (9. ročník)

Teraz to skúsime naopak, z grafu určiť rovnicu lineárnej funkcie.

<u>PRÍKLAD 9:</u> Zapíšte zadanie lineárnej funkcie danej grafom:



Priesečníky grafu funkcie s osami *x* a *y*

sú označené *A* a *B*.

Ich súradnice sú $A[4;0]$, $B[0;-2]$.

Rovnica lineárnej funkcie:

$y = k.x + q$, kde $q = -2$

(-2 je y-ová súradnica bodu B)

Po dosadení je už tvar rovnice: $y = k.x - 2$

Dosaďme do rovnice súradnice bodu $A[4;0]$:

$$0 = k.4 - 2$$

$$2 = k.4$$

$$k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Rovnica funkcie danej grafom je $y = \frac{1}{2}x - 2$.

LINEÁRNA FUNKCIA (9. ročník)

A čo ak poznáme súradnice dvojice bodov, cez ktoré prechádza graf lineárnej rovnice a tieto body nie sú priesečníkmi s osami x a y?

Úlohu môžeme riešiť graficky a nájsť aj súradnice priesečníkov a postupovať ako v príklade 9, alebo riešiť úlohu nasledovne. (cez sústavu rovníc, ktorá však už nie je podľa novej školskej koncepcie obsahom ICSED 2).

PRÍKLAD 10: Nájdite rovnicu lineárnej rovnice, ktorá prechádza bodmi $A[2;3]$, $B[-2;-1]$

Pre súradnice bodu A: $x = 2; y = 3$, po dosadení do rovnice dostaneme $3 = k.2 + q$

Pre súradnice bodu B: $x = -2; y = -1$, po dosadení do rovnice dostaneme $\underline{-1 = k.(-2) + q}$

Použitím sčítacej metódy (sčítame ľavé a pravé strany rovníc) dostaneme: $2 = 0 . k + 2 . q$

a z tohto vyjadrenia dostaneme $2 = 2.q$ a následne vyjadríme $q = 1$

Po dosadení do prvej alebo druhej rovnice vyjadríme aj hodnotu neznámej *k* takto:

Prvá rovnica $3 = k.2 + 1$

$2 = 2.k$

$k = 1$

Druhá rovnica $-1 = k.(-2) + 1$

$-2 = -2.k$

$k = 1$

Rovnica lineárnej rovnice prechádzajúcej bodmi $A[2;3]$, $B[-2;-1]$ je $y = 1.x + 1$, teda $y = x + 1$

Poznámka: Ak by koeficienty v rovniciach neboli opačná čísla, sčítaním rovníc by sme sa tak nezbavili neznámej *k*.

V takomto prípade vynásobíme jednu z rovníc číslom (-1) a následne rovnice sčítame. Pri tejto úprave sa nám odčítajú hodnoty *q* a v rovnice ostane už len jedna neznáma *k*.

Aj predchádzajúci príklad by sme mohli riešiť týmto postupom nasledovne:

$3 = k.2 + q$

$\underline{-1 = k.(-2) + q \,/.(-1)}$

$3 = k.2 + q$

$\underline{1 = k.2 - q}$

$4 = 4.k$, tak pre neznámu platí $1 = k$

Po dosadení do prvej alebo druhej rovnice vyjadríme aj hodnotu neznámej *q* takto:

Prvá rovnica $3 = 1.2 + q$

$q = 3 - 2$

$q = 1$

Druhá rovnica $-1 = 1.(-2) + q$

$-1 + 2 =.q$

$q = 1$

Rovnica lineárnej rovnice prechádzajúcej bodmi $A[2;3]$, $B[-2;-1]$ je $y = 1.x + 1$, teda $y = x + 1$.

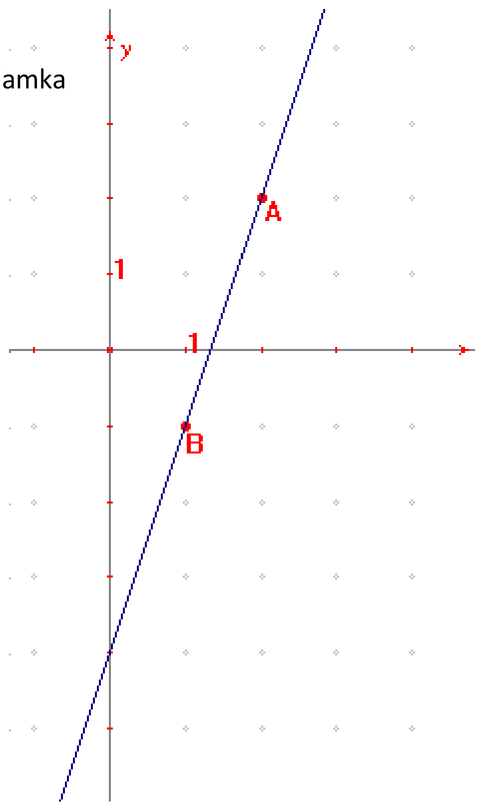
LINEÁRNA FUNKCIA   (9. ročník)

VZOROVÝ PRÍKLAD:

1. Je daná lineárna funkcia $y = 3x - 4$
a) Narysujte graf tejto funkcie
b) Určte monotónnosť funkcie (rastúca, klesajúca, konštantná)
c) Určte súradnice priesečníkov s osou *x* , *y*
d) Aká je hodnota funkcie pre *x =18*
e) Pre akú hodnotu *x* nadobúda funkcia hodnoty väčšie ako 20 ?
f) Vypočítajte obsah a obvod trojuholníka, ktorého vrcholy sú priesečníky s osami *x* a *y* a začiatok súradnicovej sústavy (počítajte v cm, cm^2)
g) Zistite, či body A [-3 ; -13], B [4 ; 9] patria do grafu tejto funkcie

RIEŠENIE:

a) Graf funkcie: určíme 2 body, ktorými prechádza priamka



x	***1***	***2***
y	***-1***	***2***

b) Funkcia je rastúca (určíme podľa grafu),

alebo podľa hodnoty koeficientu pre premennou *x*.

c) Priesečníky s osami:

- S osou x ... $y = 0;$ $0 = 3x - 4$
  $4 = 3x$
  $\frac{4}{3} = x$

Priesečník s osou x je bod $P_1\left[\frac{4}{3}; 0\right]$

- S osou y ... $x = 0;$ $y = 3.0 - 4$
  $y = -4$

Priesečník s osou y je bod $P_2[0;\ -4]$

d) $x = 18;\quad y = 3.18 - 4 = 54$

Hodnota funkcie $y = 3x - 4$ pre $x = 18$ je $y = 54$, teda $y(18) = 54$

e) Hodnota funkcie sa rovná 20 pre x ...

$20 = 3x - 4$ — Keďže hľadám hodnoty funkcie väčšie ako 20, teda $y > 20$.

$20 + 4 = 3x$ — potom $x > 8$.

$24 = 3x$ — Môžem zapísať aj intervalom $x \in (8;\ \infty)$

$x = 8$

f) Už vieme súradnice priesečníkov s oboma osami $P_1\left[\frac{4}{3}; 0\right]$, $P_2[0;\ -4]$. Preto dĺžka jednej odvesny trojuholníka je $\frac{4}{3}\ cm\ a\ 4\ cm$.

Dosadením do vzorca pre obsah trojuholníka vyrátame $S = \frac{\frac{4}{3}.4}{2} = \frac{\frac{16}{3}}{2} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} cm^2$

Pre obvod potrebujem poznať dĺžky prepony, tú vyjadrime pomocou Pytagorovej vety:

LINEÁRNA FUNKCIA (9. ročník)

$$c^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2 \qquad\qquad o = \frac{4}{3} + 4 + \frac{\sqrt{160}}{3} = 12{,}636$$

$$c^2 = \frac{16}{9} + 16$$

$$c^2 = \frac{16}{9} + \frac{144}{9}$$

$$c^2 = \frac{160}{9}$$

$$c = \sqrt{\frac{160}{9}} = \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{160}}{3} = 4{,}216$$

g) Ak bod leží na grafe, po dosadení jeho hodnôt súradníc do rovnice $y = 3x - 4$, musí táto rovnosť byť pravdivá.

Pre bod A [-3 ; -13]

$$-13 = 3\,.\,(-3) - 4$$
$$-13 = -9 - 4$$
$$-13 = -13$$

Rovnosť platí, preto bod A leží na grafe funkcie, $A \in y = 3x - 4$

Pre bod B [4 ; 9]

$$9 = 3\,.\,4 - 4$$
$$9 = 12 - 4$$
$$9 = 8$$

Rovnosť neplatí, preto bod B neleží na grafe funkcie, $B \notin y = 3x - 4$.

VZOROVÝ PRÍKLAD:

2. Určte priesečníka P grafov lineárnych funkcií y = x – 1 a y = -0,5x + 2 . Úlohu riešte aj graficky.

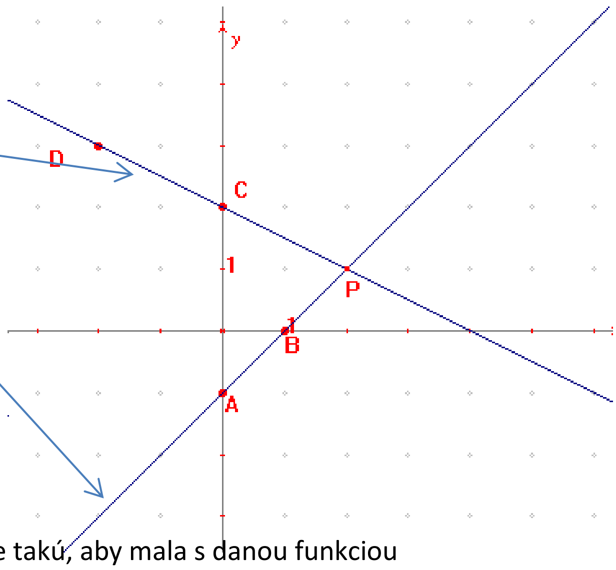
RIEŠENIE:

x	***0***	***-2***
y	***2***	***3***

$y = -0{,}5x + 2$

x	***0***	***1***
y	***-1***	***0***

$y = x - 1$



Z grafu určíme priesečník bodu $P[2; 1]$

VZOROVÝ PRÍKLAD:

3. K danej lineárnej funkcii *y = 5x - 12* nájdite takú, aby mala s danou funkciou
   a) Nekonečné veľa riešení
   b) Žiadne riešenie
   c) Jedno riešenie

RIEŠENIE:

a) $y = 5x - 12$ tá istá priamka splýva pôvodnou
b) $y = 5x + a$ $a \neq 12$; napr. $y = 5x + 9$
c) $y = x + 8$ musí mať koeficient pred x iný ako číslo 5 a absolútny člen ľubovoľné číslo